

素数とリーマン予想についての一考察

A Study of Prime Numbers and Riemann Hypothesis

高林 茂樹

TAKABAYASHI Shigeki

Prime numbers have an important role to encrypt information on the Internet. If Riemann Hypothesis is proved, the encryption may be easily decoded. This paper is the study of Riemann Hypothesis by visualization of the zeta function using Excel and VBA. It is easy to specify ranges and scales of complex plane on the graph. In the complex plane, non-trivial zeros of the zeta function was confirmed to be present on a straight line of the real part $1/2$.

1. はじめに

現在の情報化社会で、インターネットなどでの通信やデータを保存する場合に、素数が情報の暗号化のために重要な役割をしている。公開鍵暗号のアルゴリズムでは、一般に大きな数の素因数分解は困難であるということに基礎を置くものが多く使用されている。たとえば RSA 暗号は、2つの大きな素数の掛け算は比較的簡単に行えるが、その積を素因数分解して元の2つの素数を求めることは難しいということに基づいている。しかし、リーマン予想が証明され、素数の判定が容易になり、さらに大きな数の素因数分解も短時間で行うことができるようになると、現在インターネット等で使用されている暗号が役立たなくなり政治、経済、金融、商取引、軍事など暗号を利用している所ではセキュリティの面で大きな影響が予想される。

素数は、1と自分以外に正の約数を持たない、1でない自然数のことである。素数が無数に存在することは、古代ギリシャ時代から知られていて、ユークリッドによって証明されている。

ある数 x 以下の素数の個数については、1896年に、ジャック・アダマールとド・ラ・ヴァレ・

プサンによって独立に証明された素数定理がある。この定理は、 x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とすると、次の近似式で示される。

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t} \approx \frac{x}{\log x}$$

与えられた数 n が素数であるかどうかを判定するためのアルゴリズムは、多数考案されているが、最も素朴な方法は、 n が合成数であれば、 n の素因数は \sqrt{n} 以下であるから、2から \sqrt{n} 以下の素数まで順番に割っていく、試し割りと呼ばれる方法である。この試し割りは、 n が大きくなるに従って、急速に時間がかかってしまう。ただし、特殊な形をした数に対してはより高速なアルゴリズムも存在する。たとえば、メルセンヌ数 (Mersenne number) が素数かどうかを調べるための判定法としては、エドゥアール・リュカの判定法をデリック・ヘンリー・レーマーが改良したリュカ-レーマー・テストがある。メルセンヌ数とは、2の累乗よりも1小さい自然数、すなわち $2^n - 1$ (n は自然数) の形の自然数のことである。

2013年6月の時点で知られている最大の素数は、2013年1月に発見された、メルセンヌ素数の1つで $2^{57885161} - 1$ であり、十進記数法で表記したときの桁数は17,425,170桁になる。^[1]

(現在の最大素数) 581,887,266,232,246,442,175,100,212,113,232,368,636,370,
852,325,421,589,325,781,704,480,584,492,761,707,442,316,428,281,349,423,376,
942,979,071,335,489,886,655,517,752,224,731,316,967,316,601,101,080,371,457,
..... (途中省略)
400,898,981,891,179,715,830,393,827,598,062,506,665,259,086,044,516,822,494,
937,745,410,942,833,323,095,203,705,645,658,725,746,141,988,071,724,285,951

無限にある素数の分布の規則性については解明されていない。つまりある素数と次の素数の間隔を一般的に計算することは現在できない。リーマン予想の証明はこの解決をめざしている。このリーマン予想は、数学上の未解決問題で、「ミレニアム懸賞問題」の1つでもあり、約150年間未解決の難問である。ミレニアム懸賞問題とは、クレイ数学研究所によってそれぞれ100万ドルの懸賞金がかけられていて、「 $P \neq NP$ 予想」、「ホッジ予想」、「ポアンカレ予想」(証明済み)、「リーマン予想」、「ヤン-ミルズ方程式と質量ギャップ問題」、「ナビエ-ストークス方程式の解の存在と滑らかさ」、「パーチ・スウィンナートン=ダイアー予想」の7つである。リーマン予想は、ド

イツの数学者ベルンハルト・リーマンによって提唱された、ゼータ関数の零点の分布に関する予想である。リーマンは素数の分布に関する研究を行っている際にオイラーが研究していた関数にゼータ関数という名前を付け、解析接続を用いて複素数全体への拡張を行った。ゼータ関数は、下記に示すものである。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

リーマン予想とは、「複素数全体（ただし $s \neq 1$ ）へゼータ関数を拡張した場合、ゼータ関数 $\zeta(s)$ の自明でない零点 s は、全て実部が $1/2$ の直線上に存在する。」というものである。

この論文では、Excel と VBA を使用して、グラフ化の対象となる複素平面の範囲を自由に指定し、拡大縮小も可能にして、素数と関連あるゼータ関数をビジュアル化し、リーマン予想について考察する。

2. ゼータ関数の拡張

2.1 ゼータ関数の変形

ゼータ関数は、オイラーによって、次のように積の形（オイラー積）に変形できることが示された。^{[2] [3]}

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdot \frac{1}{1-11^{-s}} \cdots \\ &= \prod_{p: \text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} \end{aligned}$$

この式の中に素数 p が現れていることがわかる。

2.2 解析接続

解析接続は、一定の条件のもとで、関数の定義域を拡張することである。正則関数の定義域の

拡張ある領域 D で正則（複素微分が可能）な関数 $f(z)$ があるとする。 D と共通部分をもつ領域 D_1 を考えると、共通部分 $D \cap D_1$ と和集合 $D \cup D_1$ はともに領域である。このとき、 $D \cap D_1$ で $f(z)$ と同じ値をとり、しかも D_1 で正則であるような関数 $f_1(z)$ が存在する場合、関数 $f_1(z)$ を $f(z)$ の D_1 への解析接続であるという。^[4]

ゼータ関数の解析接続は次のようになる。^[4]

関数等式では

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \zeta(z) \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

この式から $s = 1-z$ とすると、下記の式になる。

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}$$

$s = -2n$ (n は自然数) とすると、つまり s が負の偶数のとき、 $\sin(n\pi)$ の部分があるので、 0 になる。

$$\zeta(-2n) = 2^{-2n} \pi^{-2n-1} \zeta(1+2n) \Gamma(1+2n) \sin(n\pi) = 0$$

これがゼータ関数の自明の零点である。

解析接続のゼータ関数を級数で表すと次のようになる。^[4]

実部 $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

実部 $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

次に、解析接続されたゼータ関数も使用して複素平面でのグラフ化をする。

3. ゼータ関数のビジュアル化

3.1 複素平面でのゼータ関数の計算

(1)x の実部 $\text{Re}(x)$ が $1 < \text{Re}(x)$ の場合

下記のゼータ関数を使用して、複素平面上での絶対値を計算した。項数は300までとした。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Excel のシート上では、B4に実部、C4に虚部を入力することにより、複素数を C7、計算結果を C9に表示するようにした。F3以下には計算式

=IMDIV(COMPLEX(1,0),IMEXP(IMPRODUCT(COMPLEX(LN(E3),0),C\$7)))

を入力した。計算結果は、複素数の絶対値とした。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ゼータ関数								
2		実部	虚部			値	絶対値	計算	絶対値の絶対値
3						1	1.000000		
4						2	0.500000		
5						3	0.333333		
6						4	0.250000		
7						5	0.200000		
8						6	0.166667		
9						7	0.142857		
10						8	0.125000		
11						9	0.111111		
12						10	0.100000		
13						11	0.090909		
14						12	0.083333		
15						13	0.076923		
16						14	0.071429		
17						15	0.066667		
18						16	0.062500		
19						17	0.058824		
20						18	0.055556		
21						19	0.052632		
22						20	0.050000		
23						21	0.047619		
24						22	0.045455		
25						23	0.043478		
26						24	0.041667		
27						25	0.040000		
28						26	0.038462		
29						27	0.037037		
30						28	0.035714		
31						29	0.034483		
32						30	0.033333		

図-1 ゼータ関数の計算例 ($1 < \text{Re}(x)$ の場合)

(2)x の実部 $\text{Re}(x)$ が $0 < \text{Re}(x) < 1$ の場合

下記のゼータ関数を使用して、複素平面上での絶対値を計算した。項数は300までとした。

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

Excel のシート上では、B4に実部、C4に虚部を入力することにより、複素数を C7、計算結果を C12に表示するようにした。F3以下には計算式

=IMPRODUCT(COMPLEX((-1)^(E3-1),0),IMDIV(COMPLEX(1,0),IMEXP(IMPRODUCT(COMPLEX(LN(E3),0),C\$7))))

を入力した。計算結果は、複素数の絶対値とした。

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	ゼータ関数								
3		実部	虚部						
4		0.5	0.41						
5									
6		複素数	計算結果						
7									
8									
9									
10									
11									
12	結果								
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									

図-2 ゼータ関数の計算例 (0<Re(x)<1の場合)

3.2 ゼータ関数のグラフ

(1)グラフ化の範囲指定

グラフ化する範囲を指定して、その範囲のゼータ関数の計算をして、結果をグラフにした。実部の範囲を B2~D2、虚部の範囲を B3~D3に入力して、範囲内の50の区間について、下記の VBA を実行して作表し、グラフを表示した。

```

Sub zetax ( )
    Dim WK2 As Worksheet
    Set WK2 = Worksheets("Sheet1")
    Dim WK3 As Worksheet
    Set WK3 = Worksheets("Sheet8")
    
```

```

x1 = WK3.Cells(2, 2).Value: x2 = WK3.Cells(2, 4).Value
stepx = (x2 - x1) / 50
y1 = WK3.Cells(3, 2).Value: y2 = WK3.Cells(3, 4).Value
stepy = (y2 - y1) / 50
For j = 6 To 65
    WK3.Cells(5, j).Value = x1
    x1 = x1 + stepx
Next j
For i = 6 To 65
    WK3.Cells(i, 5).Value = y1
    y1 = y1 + stepy
Next i
Application.ScreenUpdating = False
For i = 6 To 65
    For j = 6 To 65
        WK2.Cells(4, 2).Value = WK3.Cells(5, j).Value
        WK2.Cells(4, 3).Value = WK3.Cells(i, 5).Value
        WK3.Cells(i, j).Value = WK2.Cells(9, 3).Value
    Next j
Next i
Application.ScreenUpdating = True
End Sub

```

図-3のゼータ関数のグラフ（ $2-12+10i$ の場合）は実部が1以上で、1に近い部分でゼータ関数の計算値が高くなっているほかは、なだらかなグラフである。1の場合には、ゼータ関数は収束せず無限大となる。また、正の偶数の場合は、ゼータ関数の値は、オイラーにより π を含む値になることが知られており、下の表の中で数値が示されている。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} \quad \zeta(12) = \frac{\pi^{12}}{638512875} \dots\dots$$

実部が1以上の複素平面では、ゼータ関数の零点は見つかっていない。

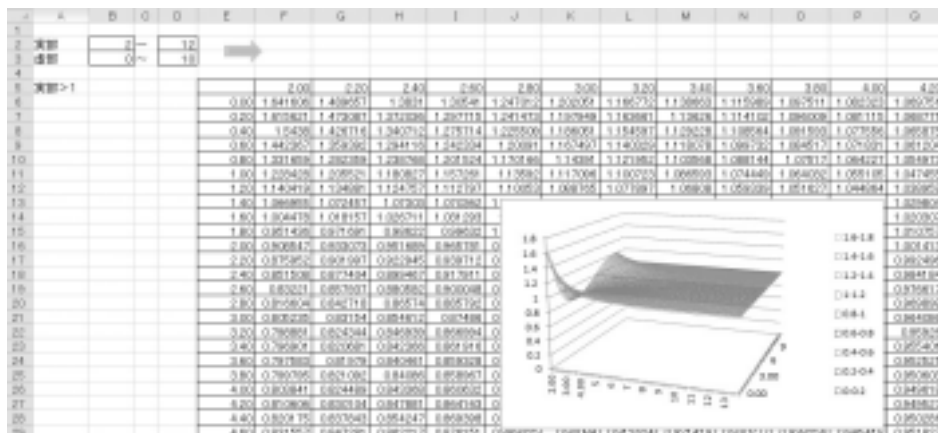


図-3 ゼータ関数のグラフ (2~12+10i の場合)

図-4のゼータ関数のグラフ ($0.4+14i \sim 0.6+14.2i$ の場合) は、中心が、落ち込んだグラフになっている。これは、リーマン予想通りに実部が0.5上の線に零点があることを示している。この零点は、 $0.5 + (14.1347251417\cdots)i$ として知られている。^[5]

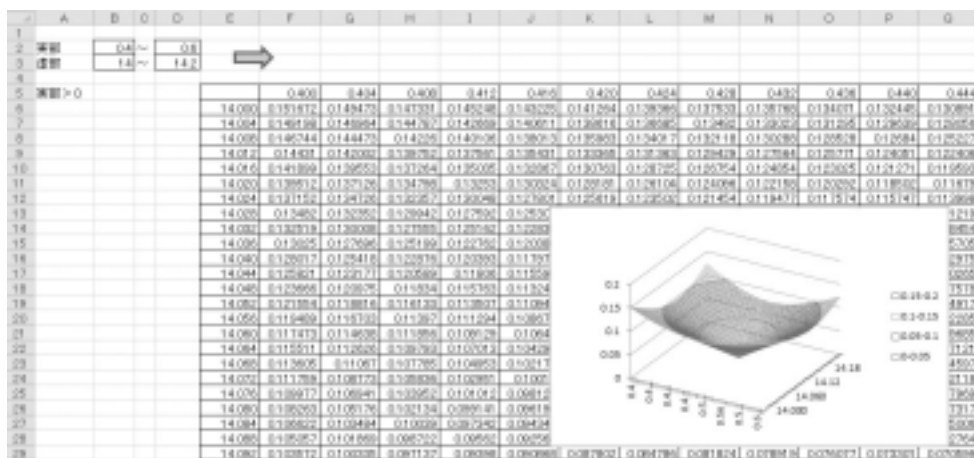


図-4 ゼータ関数のグラフ ($0.4+14i \sim 0.6+14.2i$ の場合)

(2)ゼータ関数の零点の分布

範囲を拡大して零点の分布を見ることにする。図-5は、実部0.1から0.9まで、虚部が10から50までの間にある部分についてゼータ関数の計算値をグラフで表したものである。区間数は、実部

が50、虚部が400である。実部が0と1の間では、零点が存在するため、変化が激しくなっている。

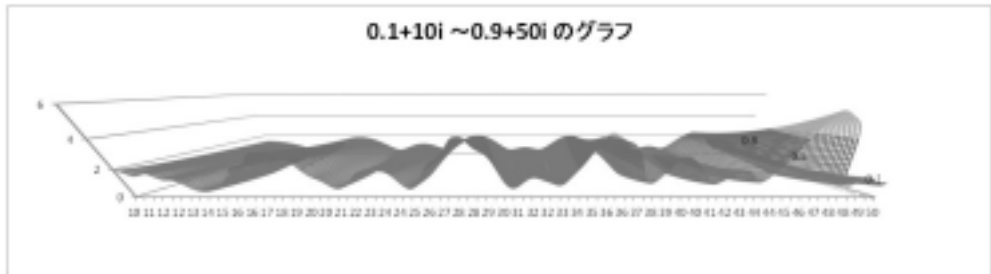


図-5 ゼータ関数のグラフ (0.1+10i~0.9+50i の場合)

図-6は、実部が0.5上で虚部が10から50までの間にあるゼータ関数の計算値をグラフで表したものである。区間数は、虚部が400である。この間には10個の零点が存在するがわかる。実部0.5上の零点は、無限に存在することが、1914年にハーディによって証明されている。^[3]しかし、実部0.5上以外には、非自明な零点は存在しないということは証明されていない。

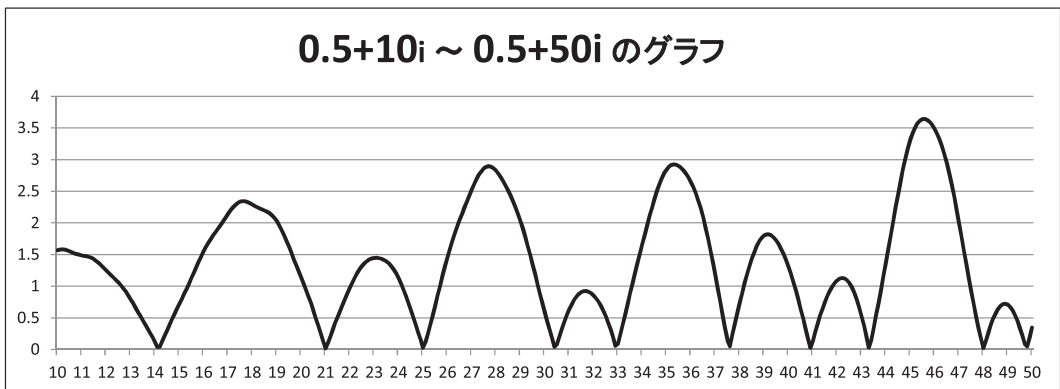


図-6 ゼータ関数の実部0.5上 (虚部10~50) のグラフ

図-7は、実部が0.5上で虚部が0から500までの間にあるゼータ関数の計算値をグラフで表したものである。区間数は、虚部が5,000である。虚部が大きくなると零点の密度が増していることがわかる。この零点の分布にどのような規則性があるのか詳しくはわかっていない。

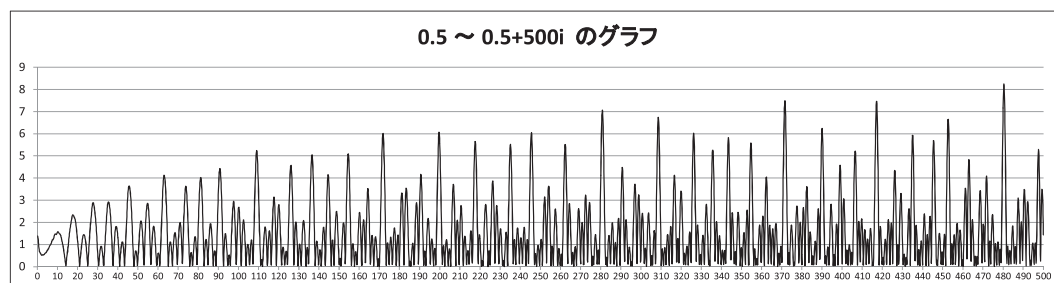


図-7 ゼータ関数の実部0.5上（虚部0~500）のグラフ

実部0.5上以外に、非自明な零点が存在することを発見すれば、リーマン予想は成立しなくなる。コンピュータを使用して零点の探索が行われているが、実部0.5上以外での非自明な零点はまだ発見されていない。

4. おわりに

リーマン予想の研究過程で、素数と素粒子の違いはあるが、素数の理論と物理の理論との類似のあることが言われている。^[6]

自然数→《分解》→素数→《統合》→ゼータ関数

物質→《分解》→素粒子→《統合》→統一場理論

リーマン予想が証明されると物理学にも影響があるかもしれないが、もっとも影響を受けやすいのはインターネット等で使用されている素数を利用した暗号技術である。リーマン予想が証明されることで、素因数分解が高速で可能になるかどうかはまだわからないが、暗号化の方式を楕円曲線暗号など他の方法に切り替えることも検討すべきである。高性能コンピュータの出現で、実部0.5上以外での非自明な零点が発見されてリーマン予想が証明不能となることも考えられるが、関数体上（有限体上や複素数体上）ではすでに証明されている。^[3] したがって、リーマン予想の証明も近いかも知れない。

今後は、非可換幾何や一元体あるいはこれ以外の方法によるリーマン予想の証明と、ゼータ関数の非自明零点の分布と素数の分布の関連性の研究による新しい素数の発見と素因数分解の効率的な方法について探っていきたい。

参考文献

- [1] Landon Curt Noll 「 $2^{57885161}-1$ is prime」 2013
<http://www.isthe.com/chongo/tech/math/digit/m57885161/prime-c.html#middle>
- [2] Euler 「The Euler Archive」 2013参照
<http://eulerarchive.maa.org>
- [3] 黒川信重 「リーマン予想の探求」 技術評論社 2012
- [4] 武藤研究室 「物理数学第一 解析接続」 2010
http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/Amath06/am_chap13.pdf
- [5] Hirokuro 「リーマン仮説と零点の計算方法」 2013参照
<http://hirokuro.e-whs.net/riemann.html>
- [6] 黒川信重 「素数からゼータの未来へ」 2008
<http://mathsoc.jp/publication/tushin/1303/1303kurokawa.pdf>